ENSI
Option P - Session 1977
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

-I-

1. Montrer que, quels que soient les nombres α et x réels, la série

$$1+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{(n!)^2}x^n$$

converge. Dans toute la suite, on notera $f_\alpha(x)$ la somme de cette série.

2. (a) Préciser quelles sont les fonctions f_1, f_0, f_{-1} et f_{-2}.

(b) Montrer que, pour tout entier $n\geq 0$, la fonction f_{-n} est polynomiale de degré n, et indiquer quel est son terme de plus haut degré.

3. Donner une valeur décimale approchée du nombre $f_{\frac{1}{2}}(-1)$ avec une erreur absolue inférieure à 2.10^{-3}.

-II-

1. α étant un nombre réel donné, on cherche une fonction $x\mapsto y(x)$ réelle de variable réelle, telle que $y(0)=1$, qui soit la somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

et qui, pour tout x réel, vérifie l'équation différentielle :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha y=0.$$

Trouver la valeur de a_1 et, pour tout entier $k\geq 2$, la relation de récurrence entre a_{k-1} et a_k, condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. En déduire que le problème a pour unique solution la fonction $y=f_\alpha(x)$ introduite au I.

2. Écrire une équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par la fonction $x\mapsto e^xf_\alpha(-x)$. En admettant que la dite fonction somme d'une série entière de rayon de convergence infini, montrer que, quels que soient α et x réels, on a l'égalité :

$$f_{1-\alpha}(x)=e^xf_\alpha(-x).$$

3. Soit n un entier fixé ≥ 1. Quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de

$$\frac{f_{n+1}(x)}{xf_n(x)}?$$

-III-

1. Pour tout réel $x<1$, calculer l'intégrale

$$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-x\sin^2\theta}.$$

2. Pour tout x réel, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} \mathrm{d}\theta.$$

N.B - On ne cherchera pas à calculer explicitement l'intégrale définissant $\varphi(x)$.

(a) Montrer que, pour tout u réel < 1, on a $e^u \leq \dfrac{1}{1-u}$.

(b) En utilisant cette inégalité sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$, montrer que, pour tout x réel < 1, on a :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

(c) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x réel ≤ -1, on ait

$$\varphi(x) \geq \frac{c}{\sqrt{-x}}.$$

3. (a) Pour tout entier $k \geq 0$, on pose

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta \mathrm{d}\theta.$$

En intégrant par parties, trouver une relation entre I_k et I_{k+1}. En déduire la valeur des I_k.

(b) Sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$ au III 2, remplacer $e^{x \sin^2 \theta}$ par une série entière de la variable $x \sin \theta$, puis, en admettant qu'on peut permuter l'intégration et la sommation, montrer que, pour tout x réel, on a $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} f_{\frac{1}{2}}(x)$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{\frac{1}{2}}(x) = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{\frac{1}{2}}(x) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ou divergente ?

4. Montrer que, si l'on attribue à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2 \theta} \mathrm{d}\theta$ la valeur 1, on commet une erreur absolue inférieure à 2.10^{-2}, mais que néanmoins 1 n'est pas la valeur exacte de cette intégrale.

-IV-

On note x, y, z les coordonnées cartésiennes dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et l'on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Comment choisir le nombre réel α pour que la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\alpha(r)$$

vérifie, dans $\mathbb{R}^3$ privé de $0yz$, la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{4r^2} F = 0?$$

FIN DE L'ÉPREUVE